

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ

I. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУР LQ -ОПТИМИЗАЦИИ*

А. Г. Александров[†], В. Н. Честнов[‡]

УДК 62-50

©1998 г., 7, стр. 83-95

Автоматика и телемеханика

Адаптивные и робастные системы

Аннотация. Формулируется задача синтеза непрерывных регуляторов, обеспечивающих требуемую точность по регулируемым переменным в установившемся режиме при неизмеряемых ограниченных полигармонических внешних возмущениях с неизвестными амплитудами и частотами. Получены условия её разрешимости и алгоритмы синтеза для двух видов объектов на основе исследования частотных свойств LQ -оптимальных систем и выбора коэффициентов квадратичного функционала оптимизации.

1 Введение

Реальные системы автоматического управления, как правило, функционируют в условиях неопределённых, но ограниченных внешних возмущений, которые отклоняют регулируемые переменные от желаемых значений (в задаче регулирования это нулевые значения) и поэтому регулятор должен обеспечивать заданные допуски на эти отклонения. Начиная с регулятора Уатта, синтез регуляторов, обеспечивающих заданную точность управления, является одной из центральных проблем теории автоматического регулирования, и можно выделить несколько направлений её исследования.

В первом направлении параметры и структура системы управления выбираются так, чтобы регулируемые переменные объекта не зависели от внешних возмущений. К этому направлению можно отнести работы по теории инвариантности, системам с бесконечно большими коэффициентами усиления и переменной структурой [1], а также, в определённой степени, методы стохастической теории оптимизации [2].

В рамках второго направления строится алгоритм управления, обеспечивающий наименьшие ошибки регулирования при наихудшем ограниченном возмущении из определённого класса. Это направление развивается на базе методов минимакса и теории дифференциальных игр [3]. К нему примыкают исследования по L_1 оптимальному управлению [4], а также по H_∞ теории оптимизации [5].

*Имеется продолжение: Часть II. Применение процедур H_∞ -оптимизации.

[†]Доктор физико-математических наук (Московский государственный институт стали и сплавов).

[‡]Кандидат технических наук (Институт проблем управления РАН, Москва).

Третье направление опирается на аналитическое исследование свойств процедур аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР, в зарубежной литературе LQ -оптимизации), начало которому было положено в работах [6], [7]. При этом решение проблемы точности опирается на выбор структуры и коэффициентов квадратичного функционала оптимизации в задаче АКОР. Для типовых внешних возмущений (ступенчатых и гармонических) и классов объектов, рассматриваемых ниже, такие результаты получены в работах [8]-[13]. Следует отметить, что одной из главных трудностей первых двух направлений является проблема грубости синтезируемых систем, которой в третьем направлении уделяется большое внимание [13]-[16].

В настоящей работе, состоящей из двух частей, продолжают исследования в третьем направлении. В этой, первой части, рассматриваются два вида объектов, для которых существуют регуляторы, обеспечивающие любую наперёд заданную точность в установившемся режиме. Для таких объектов построены методы синтеза, основанные на процедурах АКОР. От известных результатов [8]-[13] они отличаются более широким классом внешних возмущений (полигармонических, представленных суммой конечного числа гармоник с неизвестными амплитудами и частотами), а также структурой регулятора по выходу, который строится не в форме «вход-выход» как в [13] (преобразование которого к уравнениям состояния не всегда возможно), а с использованием наблюдателя полного порядка. Во второй части работы рассматриваются объекты управления общего вида и применяются процедуры H_∞ -оптимизации. Обе части работы объединяет общность методики получения результатов, которая базируется на исследовании частотных свойств замкнутых LQ - и H_∞ -оптимальных систем и выборе коэффициентов функционала оптимизации. Эта часть развивает результаты, впервые представленные в [17].

2 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{w} + B_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = C_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = C_2\mathbf{x}; \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = A_r\mathbf{x}_r + B_r\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = C_r\mathbf{x}_r + D_r\mathbf{y}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния объекта (2.1), $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управления, $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$ – вектор регулируемых переменных, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$ – вектор измеряемых переменных, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^\mu$ – вектор внешних неизмеряемых возмущений, $\mathbf{x}_r(t) \in \mathbf{R}^{n_r}$ – вектор состояния регулятора (2.2). Постоянные числовые матрицы A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 известны; A_r , B_r , C_r , D_r – неизвестные матрицы регулятора (2.2). Пара матриц (A, B_2) предполагается стабилизируемой, а пары (C_1, A) и (C_2, A) – детектируемыми.

Компоненты вектора внешних возмущений – ограниченные полигармонические функции

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^p w_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}) \quad i = \overline{1, \mu}. \quad (2.3)$$

Здесь амплитуды w_{ik} , начальные фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}$, $k = \overline{1, p}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, p}$) гармоник неизвестны; однако известно, что амплитуды гармоник подчинены условию

$$\sum_{k=1}^p w_{ik}^2 \leq w_i^{*2} \quad i = \overline{1, \mu}, \quad (2.4)$$

где p – известное число гармоник, w_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) – заданные числа.

Для каждого конкретного стабилизирующего регулятора (2.2) в системе (2.1)-(2.4) введём следующие понятия.

Установившимися ошибками по регулируемым переменным назовём

$$z_{i,st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup |z_i(t)| \quad i = \overline{1, m_1}. \quad (2.5)$$

Установившимися значениями управляющих воздействий назовём

$$u_{i,st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup |u_i(t)| \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что числа (2.5) и (2.6) являются функциями параметров регулятора, а также реализовавшегося внешнего возмущения из класса (2.3), (2.4).

Найти стабилизирующий регулятор (2.2) такой, что при действии внешних возмущений из класса (2.3), (2.4) система (2.1), (2.2) удовлетворяет требованиям к точности

$$z_{i,st} \leq z_i^* \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (2.7)$$

где $z_i^* > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$) – заданные числа.

Ясно, что решение задачи 2 не всегда может существовать. Введём два вида объектов (2.1), рассматриваемых в настоящей работе, для которых задача 2 (это показано далее) разрешима для любых заданных чисел $z_i^* > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$).

Первый вид описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_2(\mathbf{u} + \mathbf{w}), \quad \mathbf{z} = C_1\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad (C_2 = I, \quad m_2 = n, \quad \mu = m), \quad (2.8)$$

где I – здесь и далее единичная матрица соответствующих размеров.

Второй вид определяется уравнениями (2.1), где $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ ($C_2 = C_1$), $m_1 = m_2 = m$ и условием минимальной фазовости для передаточной матрицы объекта по управляющим воздействиям, что требует отрицательности вещественных частей всех корней уравнения $\det[C_2 \operatorname{adj}(sI - A)B_2] = 0$, где adj – символ присоединённой матрицы.

3 Частотные свойства LQ -оптимальных систем

Важную роль в получении результатов работы играют частотные матричные неравенства, записанные для передаточных матриц замкнутой оптимальной системы, связывающих вектор регулируемых переменных $\mathbf{z}$ и вектор управляющих воздействий $\mathbf{u}$ с вектором внешних возмущений $\mathbf{w}$, которые получены в данном разделе. Подчеркнём, что они выражаются через передаточные матрицы замкнутой системы в отличие от известных результатов [13]-[16], где фигурирует передаточная матрица разомкнутой оптимальной системы.

Рассмотрим объект управления (2.8). Хорошо известно [1], [2], [6], [7], что закон управления

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x}, \quad K = -R^{-1}B_2^T P, \quad (3.1)$$

где симметрическая неотрицательно определённая матрица $P = P^T \geq 0$ удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P = -C_1^T Q C_1, \quad (3.2)$$

доставляет минимум квадратичному функционалу качества (при $\mathbf{w} = \mathbf{0}$)

$$J = \min_u \int_0^\infty (\mathbf{z}^T Q \mathbf{z} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt, \quad (3.3)$$

где Q и R – симметрические положительно определённые весовые матрицы.

Если матрица A объекта гурвицева, то часто матрицу $P \geq 0$ закона управления (3.1) находят, путём решения матричного уравнения Ляпунова [1], [14], [16], [18]

$$A^T P + P A = -C_1^T Q C_1. \quad (3.4)$$

В дальнейшем для удобства синтез регулятора (3.1) на основе решения уравнения (3.2) будем называть процедурой 1, а на базе уравнения (3.4) – процедурой 2.

Переходя к исследованию частотных свойств систем, построенных на основе процедур 1 и 2, определим передаточные матрицы замкнутой системы (2.8), (3.1)

$$T_{uw}(s) = K(sI - A_c)^{-1} B_2, \quad T_{zw}(s) = C_1(sI - A_c)^{-1} B_2, \quad A_c = A + B_2 K, \quad (3.5)$$

первая из которых связывает вектор управляющих воздействий $\mathbf{u}$, а вторая – вектор регулируемых переменных $\mathbf{z}$ с вектором внешних возмущений $\mathbf{w}$, соответственно.

В случае использования для синтеза регулятора состояния процедуры 1 имеют место следующие частотные свойства.

Передаточные матрицы (3.5) оптимальной системы (2.8), (3.1), (3.2) удовлетворяют следующим условиям:

а) частотному тождеству

$$[I + T_{uw}(-j\omega)]^T R [I + T_{uw}(j\omega)] = R - T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.6)$$

б) частотным матричным неравенствам

$$T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega) \leq R, \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.7)$$

$$[I + T_{uw}(-j\omega)]^T R [I + T_{uw}(j\omega)] \leq R, \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.8)$$

$$T_{uw}^T(-j\omega) T_{uw}(j\omega) \leq 4I \text{ (при } R = rI, r > 0), \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.9)$$

в) при $m = \mu = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $T_{uw}(j\omega)$ не покидает круга радиуса 1 с центром в точке $(-1, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.

Доказательство данной теоремы и ряда последующих утверждений работы приведено в Приложении.

Следующие аналогичные свойства справедливы, если используется процедура 2.

Передаточные матрицы (3.5) системы (2.8), (3.1), (3.4) удовлетворяют следующим условиям:

а) частотному тождеству

$$[I + 2T_{uw}(-j\omega)]^T 0,5R [I + 2T_{uw}(j\omega)] = 0,5R - T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega), \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.10)$$

б) частотным матричным неравенствам

$$T_{zw}^T(-j\omega) Q T_{zw}(j\omega) \leq 0,5R, \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.11)$$

$$[I + 2T_{uw}(-j\omega)]^T R [I + 2T_{uw}(j\omega)] \leq R, \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.12)$$

$$T_{uw}^T(-j\omega) T_{uw}(j\omega) \leq I \text{ (при } R = rI, r > 0), \quad \omega \in [0, \infty]; \quad (3.13)$$

- в) при $m = \mu = 1$ годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики $T_{uw}(j\omega)$ не покидает круга радиуса $1/2$ с центром в точке $(-1/2, j0)$ для всех частот $\omega \in [0, \infty]$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 3 и поэтому опущено.

Свойства в) теорем 3 и 3 служат интерпретацией матричных частотных неравенств (3.8) и (3.12) соответственно в случае скалярных управляющих и возмущающих воздействий. Из геометрической интерпретации этих свойств вытекает, что в первом случае модуль частотной передаточной функции $T_{uw}(j\omega)$ для всех частот не превышает двух, а во втором – единицы. Эти факты другим путём были установлены в работе [14]. Матричные неравенства (3.9) и (3.13) являются их многомерным обобщением.

4 Точность LQ -оптимальных систем с регуляторами состояния

Целью этого раздела является обобщение известных результатов [8]-[13] на случай полигармонических возмущений (2.3), (2.4) для объекта (2.8), а также снятие ограничения $m_1 = m$, которое играет существенную роль в работах [8], [10]-[13].

Как и ранее, сформулируем сначала основные результаты работы, если для синтеза регулятора состояния (3.1) используется процедура 1, а затем – для процедуры 2. Все нижеприведённые утверждения являются прямыми следствиями частотных неравенств предыдущего раздела работы.

Установившиеся ошибки системы (2.8), (3.1), (3.2) при действии полигармонических возмущений (2.3), (2.4) в случае фиксированных диагональных весовых матриц Q и R критерия (3.3) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 \leq p \sum_{i=1}^m r_i w_i^{*2}, \quad (4.1)$$

а установившиеся значения управляющих воздействий при фиксированных $R = rI$, $r > 0$ и $Q > 0$ (необязательно диагональной) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$\sum_{i=1}^m u_{i,st}^2 \leq 4p \|\mathbf{w}^*\|^2, \quad (4.2)$$

где q_i и r_i – элементы диагональных весовых матриц Q и R , $\|\mathbf{w}^*\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{w}^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_\mu^*]^T$ с компонентами из правых частей неравенств (2.4).

Легко видеть, что множество значений $z_{i,st}$ ($i = \overline{1, m_1}$) образует замкнутую область гиперэллипсоида, оси которого обратно пропорциональны q_i и прямо пропорциональны r_i – элементам соответствующих весовых матриц, выбор которых находится в руках проектировщика. Отсюда, в частности, следует, что уменьшения установившихся ошибок можно добиться увеличивая весовые коэффициенты матрицы Q и уменьшая весовые коэффициенты матрицы R – факт в качественной форме давно известный.

Закон управления (3.1), (3.2) разрешает задачу 2 для объекта (2.8), если элементы диагональных весовых матриц Q и R критерия (3.3) удовлетворяют условиям

$$q_i \geq \frac{p \|\mathbf{w}^*\|^2}{(z_i^*)^2} \quad i = \overline{1, m_1}, \quad r_i = 1 \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.3)$$

где $q_i > 0$ ($i = \overline{1, m_1}$) ограничены сверху.

Действительно, в силу (4.3) из (4.1) вытекает неравенство $\sum_{i=1}^{m_1} \left(\frac{z_{i,st}}{z_i^*} \right)^2 \leq 1$, откуда следует (2.7).

Подчеркнём, что закон управления (3.1), (3.2), (4.3) позволяет обеспечить сколь угодно высокую точность управления (числа $z_i^* > 0$ – любые) независимо от частот ω_k внешнего возмущения (2.3). Для одночастотных внешних возмущений ($p = 1$, $m_1 = m$) аналогичное (4.3) неравенство приведено в [13]. Кроме того, очевидно, что любая из переменных состояния (в этом случае $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ ($C_1 = I$, $m_1 = n$)) может быть сделана сколь угодно малой в установившемся режиме, если внешние возмущения и управления приложены в одной точке ($B_1 = B_2$). Это обобщает результат работы [9], полученный для случая ступенчатых внешних возмущений.

Сформулируем теперь аналогичное утверждение, справедливое в случае использования процедуры 2.

Установившиеся ошибки системы (2.8), (3.1), (3.4) при действии полигармонических возмущений (2.3), (2.4) в случае фиксированных диагональных весовых матриц Q и R принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{m_1} q_i z_{i,st}^2 \leq 0, 5p \sum_{i=1}^m r_i w_i^{*2}, \quad (4.4)$$

а установившиеся значения управляющих воздействий при фиксированных $R = rI$, $r > 0$ и $Q > 0$ (необязательно диагональной) принадлежат множеству, описываемому неравенством

$$\sum_{i=1}^m u_{i,st}^2 \leq p \|\mathbf{w}^*\|^2. \quad (4.5)$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 4 и здесь не приводится.

Из (4.4) в частности следует, что если выбирать весовые коэффициенты матрицы R в соответствии с (4.3), то для обеспечения выполнения требований к точности (2.7) элементы весовой матрицы Q могут быть выбраны в два раза меньшими по сравнению с первым равенством (4.3) для процедуры 1. Очевидно также, что процедура 2 гарантирует четырёхкратное уменьшение мощности управляющего воздействия в установившемся режиме по сравнению с процедурой 1, если объект устойчив (см. неравенства (4.2) и (4.5)).

Таким образом, если внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в одной точке, то всегда можно построить регулятор состояния, обеспечивающий сколь угодно высокую точность управления. Кроме того, в соответствии с результатами работ [13]–[16] гарантируемые запасы устойчивости по фазе и коэффициенту усиления (по всем управляющим входам) составляют: для процедуры 1 – не менее 60° и не менее двух; для процедуры 2 – не менее 90° и бесконечность, соответственно.

5 Точность в системе с наблюдателем

Целью данного раздела является построение регулятора по выходу для объекта второго вида, разрешающего задачу 2. В отличие от известного подхода [13], где регулятор ищется в форме «вход-выход», преобразование которого к уравнениям состояния (2.2) не всегда возможно, здесь он строится на базе наблюдателя полного порядка так, что

дополнительно гарантируется наличие запасов устойчивости по фазе и коэффициенту усиления, имевших место для регулятора состояния.

Рассмотрим объект управления второго вида, у которого в общем случае $B_1 \neq B_2$. Для решения задачи 2 приведём вектор внешних возмущений $\mathbf{w}$ ко входу объекта так, чтобы измеряемые (регулируемые) переменные не изменились. Для этого выразим из (2.1) вектор измеряемых переменных

$$\mathbf{y}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2\mathbf{u}(s) + C_2(sI - A)^{-1}B_1\mathbf{w}(s) \quad (5.1)$$

и определим вектор $\mathbf{f}$ эквивалентных внешних возмущений, приведённых ко входу объекта, соотношением

$$\mathbf{f}(s) = [C_2(sI - A)^{-1}B_2]^{-1}C_2(sI - A)^{-1}B_1\mathbf{w}(s) = T_{fw}(s)\mathbf{w}(s). \quad (5.2)$$

Тогда соотношение (5.1) можно представить как

$$\mathbf{y}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2[\mathbf{u} + \mathbf{f}]. \quad (5.3)$$

Заметим, что требование минимальной фазовости объекта гарантирует устойчивость полюсов $T_{fw}(s)$, а также одинаковый установившийся режим в исходной системе (5.1) и эквивалентной (5.2), (5.3) при действии ограниченных внешних возмущений (2.3), только в том случае, если управляющее воздействие $\mathbf{u}$ формируется лишь по измеряемым переменным $\mathbf{y}$, которые в этих системах совпадают.

Очевидно, что уравнению (5.3) может быть поставлена в соответствие следующая модель в пространстве состояний (вектор $\mathbf{f}$ удовлетворяет (5.2))

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + B_2[\mathbf{u} + \mathbf{f}], \quad \mathbf{z} = \mathbf{y} = C_2\bar{\mathbf{x}}, \quad (5.4)$$

где новый вектор состояния $\bar{\mathbf{x}}$, вообще говоря, отличен от вектора состояния исходной системы (2.1), однако векторы $\mathbf{y}(t)$ при нулевых начальных условиях совпадают.

Заметим, что передаточная матрица $T_{fw}(s)$ в общем случае не является правильной (её элементы могут иметь степени полиномов числителя выше степени полиномов знаменателя), поэтому для ограниченности сигнала f будем полагать, что частотный спектр внешнего возмущения $\mathbf{w}$ ограничен некоторым конечным числом ω^* , значение которого должно выбираться из физических соображений. Пусть найдено число ρ такое, что выполнено частотное матричное неравенство

$$T_{fw}^T(-j\omega)T_{fw}(j\omega) \leq \rho^2 I, \quad \omega \in [0, \omega^*]. \quad (5.5)$$

(Очевидно, что если $B_1 = B_2$, то $\rho = 1$, а $\omega^* = \infty$.)

Переходя к формулировке основного результата этого раздела, будем считать весовые матрицы Q и R функционала оптимизации диагональными. Пусть найдена матрица K регулятора состояния (3.1) на основе одной из процедур предыдущих разделов, условия применения которых оговариваются далее в соответствующем утверждении. Будем искать закон управления в виде

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x}_r, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{x}_r \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояния наблюдателя (фильтра) полного порядка

$$\dot{\mathbf{x}}_r = A\mathbf{x}_r + B_2\mathbf{u} + K_f(\mathbf{y} - C_2\mathbf{x}_r), \quad (5.7)$$

в котором матрица коэффициентов передачи K_f имеет вид

$$K_f = Y C_2^T, \quad (5.8)$$

где Y – неотрицательно определённое решение матричного уравнения Риккати [15], [16]

$$AY + YA^T - Y C_2^T C_2 Y = -Q_0 - \beta B_2 V B_2^T. \quad (5.9)$$

В правой части (5.9) Q_0 и V – произвольные неотрицательно определённая и положительно определённая матрицы чисел, β – достаточно большой положительный весовой коэффициент.

При $R = rI$, $r > 0$, и достаточно большом β в (5.9) неравенства теорем 4 и 4, а также следствие 4, в системе с наблюдателем (2.1), (5.6)-(5.9) остаются в силе с точностью до замены в соотношениях (4.1)-(4.5) $\|\mathbf{w}^*\|^2$ на $\rho^2 \|\mathbf{w}^*\|^2$.

Таким образом, если объект минимально-фазовый, то в асимптотике ($\beta \rightarrow \infty$) имеет место результат, аналогичный случаю полного измерения состояния, если частоты внешнего возмущения не превышают ω^* . Кроме того, гарантируемые границы запасов устойчивости в системе с таким наблюдателем сохраняют значения, имевшие место при полном измерении вектора состояния объекта [15], [16]. Отметим также, что в отличие от работы [19], здесь частотный спектр возмущения неизвестен.

6 Пример

Проиллюстрируем результаты раздела 5 работы. Рассмотрим гиросплатформу, описываемую уравнениями [13]

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 400\dot{q}_1 + 0,342\dot{q}_3 + 0,94\dot{q}_4 - 940q_3 + 342q_4 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 400\dot{q}_2 + 0,866\dot{q}_3 + 0,5\dot{q}_4 - 500q_3 + 866q_4 &= 0, \\ 803\dot{q}_1 + 154\dot{q}_2 + 100\dot{q}_3 + 754q_3 + 1130q_4 &= u_1 + w_1, \\ -718\dot{q}_1 - 1070\dot{q}_2 + 200\dot{q}_4 - 867q_3 - 754q_4 &= u_2 + w_2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где q_1, q_2 – углы прецессии гироскопов; q_3, q_4 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на её оси; u_1, u_2 – моменты двигателей стабилизации (управления); w_1, w_2 – возмущающие моменты (возмущения). Регулируемые и измеряемые переменные для данного объекта совпадают и связаны с физическими переменными соотношениями $z_1 = y_1 = q_1$, $z_2 = y_2 = q_2$, а внешние возмущения и управляющие воздействия приложены в одной точке.

[синтеза] Найти регулятор (2.2), такой чтобы при действии полигармонических внешних возмущений из класса (2.3), (2.4), где $w_1^* = w_2^* = 1000/\sqrt{2} = 701,751$; $p = 2$, установившиеся значения ошибок регулирования удовлетворяли неравенствам $z_{1,st} \leq 0,0005$; $z_{2,st} \leq 0,0005$.

Нетрудно видеть, что объект (6.1) относится ко второму виду и поэтому для решения задачи можно воспользоваться теоремой 5. Для построения матрицы K закона управления (5.6) воспользуемся процедурой 1 из раздела 3. При этом в соответствии с утверждением теоремы 5 весовые матрицы Q и R выберем из равенств (4.3): $q_1 = q_2 = 8 \cdot 10^{12}$, $r_1 = r_2 = 1$ (число $\rho = 1$, поскольку внешние возмущения и управления приложены в одной точке). При построении наблюдателя (5.7) уравнение (5.9) будем решать с матрицами $Q_0 = 0$, $V = I$ и коэффициентом $\beta = 10^{10}$. В результате решения задачи

синтеза получены следующие матрицы регулятора (2.2)

$$\begin{aligned}
 A_r &= \begin{pmatrix} 0,000000 & -1,074 \cdot 10^7 & 0,000000 & 1,714 \cdot 10^7 & 9,400000 & -1,710000 \\ 1,000000 & -1,020 \cdot 10^4 & 0,000000 & -2,393 \cdot 10^3 & -3,42 \cdot 10^{-3} & -4,700 \cdot 10^{-3} \\ 0,000000 & -1,504 \cdot 10^7 & 0,000000 & 1,009 \cdot 10^7 & 5,000000 & -4,330000 \\ 0,000000 & -2,383 \cdot 10^3 & 1,000000 & -1,228 \cdot 10^4 & -8,660 \cdot 10^{-3} & -2,500 \cdot 10^{-3} \\ -6,069 \cdot 10^3 & -8,042 \cdot 10^8 & -1,205 \cdot 10^2 & 9,957 \cdot 10^9 & -3,331 \cdot 10^2 & 5,255 \cdot 10^1 \\ -9,102 \cdot 10^2 & 9,973 \cdot 10^9 & 6,144 \cdot 10^3 & 8,080 \cdot 10^8 & 6,687 \cdot 10^1 & -2,197 \cdot 10^2 \end{pmatrix}, \\
 B_r &= \begin{pmatrix} 1,073 \cdot 10^7 & -1,714 \cdot 10^7 \\ 9,804 \cdot 10^3 & 2,389 \cdot 10^3 \\ 1,504 \cdot 10^7 & -1,010 \cdot 10^7 \\ 2,389 \cdot 10^3 & 1,188 \cdot 10^4 \\ 8,042 \cdot 10^8 & -9,957 \cdot 10^9 \\ -9,973 \cdot 10^9 & -8,079 \cdot 10^8 \end{pmatrix}, \quad D_r = 0, \\
 C_r &= \begin{pmatrix} -6,069 \cdot 10^3 & -9,473 \cdot 10^4 & -1,205 \cdot 10^2 & 3,579 \cdot 10^4 & -3,255 \cdot 10^2 & 5,820 \cdot 10^1 \\ -9,102 \cdot 10^2 & 3,208 \cdot 10^4 & 6,144 \cdot 10^3 & 1,199 \cdot 10^5 & 5,820 \cdot 10^1 & -2,235 \cdot 10^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Графики переходных процессов по регулируемым переменным и управляющим воздействиям в замкнутой системе (6.1), (2.2) при действии полигармонических внешних возмущений $w_1(t) = 410 \sin 5t + 565 \cos 7t$, $w_2(t) = 565 \sin 5t + 410 \sin 7t$ ($410^2 + 565^2 \approx 698^2 < 701,751^2$) приведены на рис. 1 (а, б). Из графиков видно, что заданные требования к точности выполнены. На рис. 2 (а, б) также показана реакция замкнутой системы на ступенчатые внешние возмущения $w_1 = w_2 = 1000$. Следует отметить, что аналогичные переходные процессы в системе с регулятором состояния, найденным на основе процедуры 1, практически совпадают с приведёнными на рис. 1 и 2.

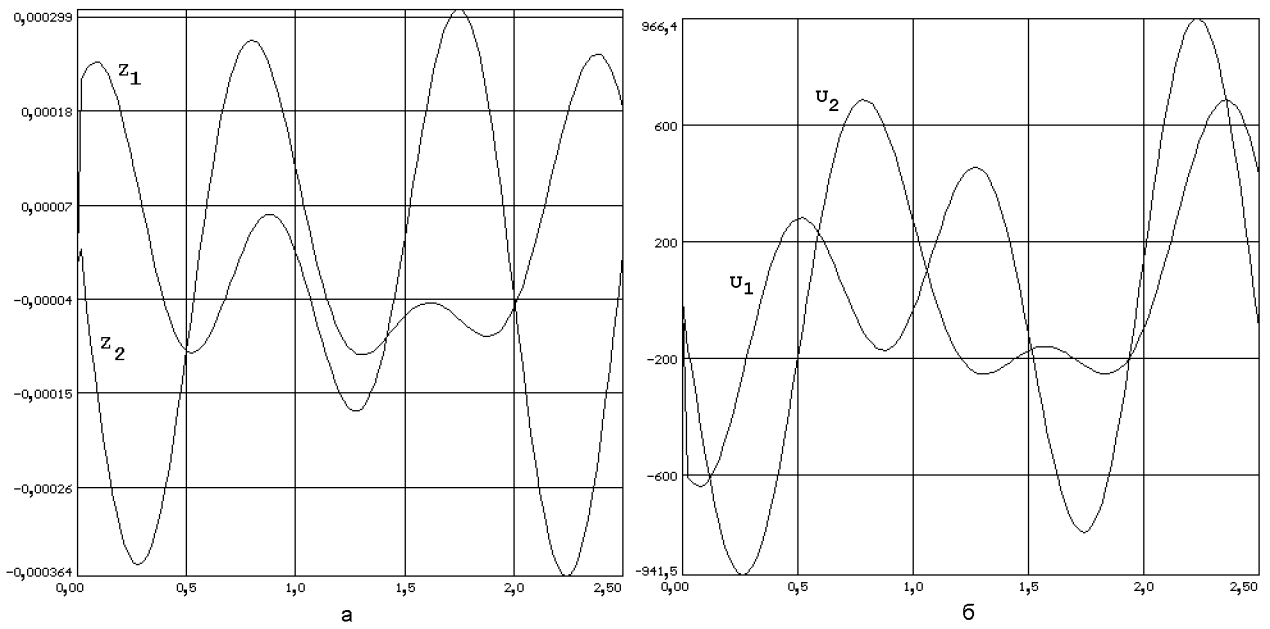


Рис 1. а, б

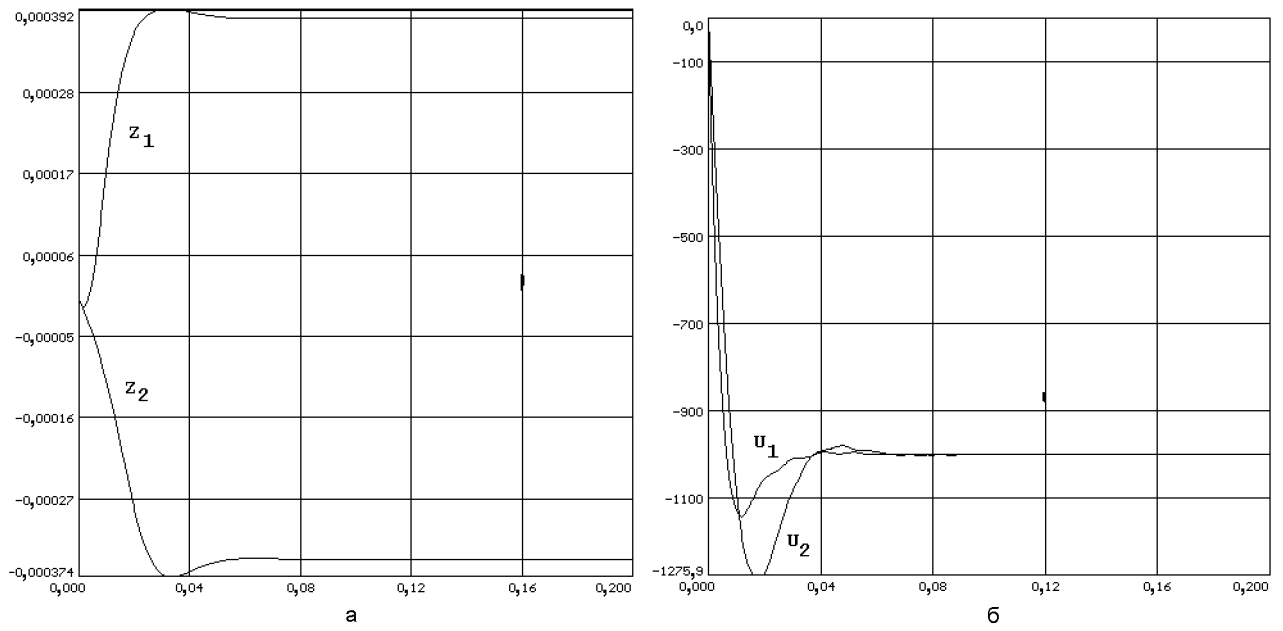


Рис 2. а, б

П.1 Доказательство теоремы 3

С учётом (3.1), (3.5) представим уравнение (3.2) в виде $A_c^T P + P A_c + P B_2 R^{-1} B_2^T P = -C_1^T Q C_1$. Из последнего выражения после добавления и вычитания из левой части sP и умножения слева на $B_2^T(-sI - A_c^T)^{-1}$, а справа на $(sI - A_c)^{-1} B_2$, принимая во внимание (3.1), (3.5) (после добавления к обеим частям матрицы R), вытекает тождество (3.6). Из тождества (3.6) в силу неотрицательной определённости его левой части следует (3.7), а в силу отрицательной полуопределённости второго слагаемого правой части вытекает (3.8). Докажем теперь неравенство (3.9). При $R = rI$, где скаляр $r > 0$, из (3.8) следует, что H_∞ норма [5] передаточной матрицы $\|I + T_{uw}\|_\infty \leq 1$, откуда используя неравенство треугольника получим $\|T_{uw}\|_\infty = \|I + T_{uw} - I\|_\infty \leq \|I + T_{uw}\|_\infty + \|I\|_\infty \leq 2$, что эквивалентно (3.9). Доказательство свойства в) элементарно и следует из (3.8).

П.2 Вспомогательная конструкция

Для доказательства последующих утверждений нам потребуется следующий результат, сформулированный ниже в виде леммы. Обозначим через $T_{\bar{z}\bar{w}}(s)$ произвольную $(l_1 \times l_2)$ устойчивую передаточную матрицу, связывающую некоторый вектор выходных переменных $\bar{z}$ с вектором входных воздействий $\bar{w}$ [$\bar{z}(s) = T_{\bar{z}\bar{w}}(s)\bar{w}(s)$], принадлежащих классу (2.3), (2.4) (с заменой размерности μ на l_2), реализации которой в пространстве состояний соответствуют выражения

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + B\bar{w}, \quad \bar{z} = C\tilde{x}, \quad T_{\bar{z}\bar{w}}(s) = C(sI - \tilde{A})^{-1}B, \quad (\text{П.1})$$

где $\tilde{A}$ – гурвицева матрица. И пусть выполнено частотное матричное неравенство

$$T_{\bar{z}\bar{w}}^T(-j\omega)\tilde{Q}T_{\bar{z}\bar{w}}(j\omega) \leq \tilde{R}, \quad \omega \in [0, \infty], \quad (\text{П.2})$$

где $\tilde{Q}$ и $\tilde{R}$ – некоторые положительно определённые диагональные матрицы соответствующих размеров $\tilde{Q} = \text{diag}[\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_{l_1}]$, $\tilde{R} = \text{diag}[\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{l_2}]$. Введём вектор $w^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_{l_2}^*]^T$, компоненты которого фигурируют в правых частях аналогов неравенств (2.4) для сигнала $\bar{w}$.

[об установившихся значениях] Пусть выполнено частотное неравенство (П.2), тогда установившиеся значения выходных переменных $\bar{z}_{i,st}$ ($i = \overline{1, l_1}$) устойчивой системы (П.1) при действии входного сигнала из класса (2.3), (2.4) принадлежат множеству, определяемому неравенством

$$\sum_{i=1}^{l_1} \tilde{q}_i \bar{z}_{i,st}^2 \leq p \sum_{i=1}^{l_2} \tilde{r}_i w_i^{*2}. \quad (\text{П.3})$$

Доказательство: Вынужденные колебания на выходе системы (П.1) (при $t \rightarrow \infty$) описываются выражением

$$\bar{z}_i(t) = \sum_{k=1}^p a_i(\omega_k) \sin[\omega_k t + \phi_i(\omega_k)] \quad i = \overline{1, l_1}, \quad (\text{П.4})$$

где $a_i(\omega_k) \geq 0$ и $\phi_i(\omega_k)$ ($i = \overline{1, l_1}$, $k = \overline{1, p}$) амплитуды и фазы выходных колебаний вызванных k -й гармоникой входного сигнала $\bar{w}$ вида (2.3), где размерность μ заменена на l_2 .

Амплитуды колебаний по каждой координате вектора $\bar{\mathbf{z}}$ из (П.4) с частотой ω_k являются модулями соответствующих компонент следующих комплексно-сопряжённых векторов $T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}(j\omega_k)\mathbf{w}_+^{(k)}$ и $T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}(-j\omega_k)\mathbf{w}_-^{(k)}$, где $\mathbf{w}_+^{(k)} = [w_{1k}e^{j\psi_{1k}}, w_{2k}e^{j\psi_{2k}}, \dots, w_{l_2k}e^{j\psi_{l_2k}}]^T$, $\mathbf{w}_-^{(k)} = [w_{1k}e^{-j\psi_{1k}}, w_{2k}e^{-j\psi_{2k}}, \dots, w_{l_2k}e^{-j\psi_{l_2k}}]^T$.

Действительно, легко проверить, что k -я гармоника входного вектора $\bar{\mathbf{w}}$ с компонентами из (2.3) может быть представлена в виде $\frac{1}{2j}(\mathbf{w}_+^{(k)}e^{j\omega_k t} - \mathbf{w}_-^{(k)}e^{-j\omega_k t})$.

Тогда, определив частные решения дифференциального уравнения (П.1), а также соответствующие им значения вектора выхода $\mathbf{z}_+$ и $\mathbf{z}_-$, при $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_+^{(k)}e^{j\omega_k t}$ и $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_-^{(k)}e^{-j\omega_k t}$, соответственно, в силу принципа суперпозиции, для k -й гармоники выходного вектора $\bar{\mathbf{z}}$ с компонентами из (П.4) можно записать

$$\frac{\mathbf{z}_+ - \mathbf{z}_-}{2j} = \frac{T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}(j\omega_k)\mathbf{w}_+^{(k)}e^{j\omega_k t} - T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}(-j\omega_k)\mathbf{w}_-^{(k)}e^{-j\omega_k t}}{2j}.$$

Очевидно, что $a_i^2(\omega_k) = z_{-i}z_{+i}$, где z_{-i} и z_{+i} — i -е компоненты векторов $\mathbf{z}_-$ и $\mathbf{z}_+$, соответственно. Теперь, принимая во внимание диагональную структуру матрицы $\tilde{Q}$, получим

$$\sum_{i=1}^{l_1} \tilde{q}_i a_i^2(\omega_k) = \mathbf{z}_-^T \tilde{Q} \mathbf{z}_+ = \mathbf{w}_-^{(k)T} T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}^T(-j\omega_k) \tilde{Q} T_{\bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{w}}}(j\omega_k) \mathbf{w}_+^{(k)} \quad k = \overline{1, p}. \quad (\text{П.5})$$

Суммируя равенства (П.5) по всем частотам с учётом неравенства (П.2), диагональной структуры матрицы $\tilde{R}$ и аналогов неравенств (2.4) для $\bar{\mathbf{w}}$, получим

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{l_1} \tilde{q}_i a_i^2(\omega_k) \leq \sum_{k=1}^p \mathbf{w}_-^{(k)T} \tilde{R} \mathbf{w}_+^{(k)} \leq \sum_{i=1}^{l_2} \tilde{r}_i w_i^{*2}.$$

Из последнего выражения с учётом очевидного в силу (П.4) условия $\bar{z}_{i,st} \leq \sum_{k=1}^p a_i(\omega_k)$ ($i = \overline{1, l_1}$) и следствия неравенства Коши-Буняковского $\left(\sum_{k=1}^p a_i(\omega_k)\right)^2 \leq p \sum_{k=1}^p a_i^2(\omega_k)$ получим искомый результат. Заметим, что лемма носит общий характер, а оценка (П.3) достижима.

П.3 Доказательство теоремы 4

Неравенство (4.1) — следствие частотного неравенства (3.7) и леммы П.2 при диагональной структуре весовых матриц Q и R . Аналогично второе неравенство — (4.2) является следствием частотного неравенства (3.9) (справедливого при некоторой $Q > 0$ и диагональной $R = rI$, $r > 0$) и леммы П.2.

П.4 Доказательство теоремы 5

Пусть для «объекта» (5.4) на основе одной из процедур раздела 3 построен регулятор состояния

$$\mathbf{u} = K\bar{\mathbf{x}}. \quad (\text{П.6})$$

Обозначим через $T_{zf}(s)$, $T_{uf}(s)$ (от $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{z}$ и $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{u}$) передаточные матрицы замкнутой системы (5.4), (П.6). Они имеют вид (3.5) и удовлетворяют частотным неравенствам теорем 3 и 3. С другой стороны эти матрицы могут быть выражены через передаточную матрицу разомкнутой (по входу $\mathbf{u}$) системы (5.4), (П.6) $W(s) = -K(sI - A)^{-1}B_2$ следующим образом

$$T_{zf}(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2[I - K(sI - A)^{-1}B_2]^{-1} = C_2(sI - A)^{-1}B_2[I + W(s)]^{-1}, \quad (\text{П.7})$$

$$T_{uf}(s) = K(sI - A)^{-1}B_2[I - K(sI - A)^{-1}B_2]^{-1} = -W(s)[I + W(s)]^{-1}. \quad (\text{П.8})$$

Аналогичные передаточные матрицы в системе с наблюдателем (5.4), (5.6)-(5.9) имеют соответственно вид

$$C_2(sI - A)^{-1}B_2[I - K_r(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2]^{-1} = C_2(sI - A)^{-1}B_2[I + W_r(s)]^{-1}, \quad (\text{П.9})$$

$$K_r(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2[I - K_r(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2]^{-1} = -W_r(s)[I + W_r(s)]^{-1}, \quad (\text{П.10})$$

где $K_r(s) = K(sI - A - B_2K + K_fC_2)^{-1}K_f$ – передаточная матрица регулятора (5.6)-(5.9) [т.е. $\mathbf{u} = K_r(s)\mathbf{y}$], $W_r(s) = -K_r(s)C_2(sI - A)^{-1}B_2$ – передаточная матрица разомкнутой (по входу $\mathbf{u}$) системы (5.4), (5.6)-(5.9). При выводе (П.7)-(П.10) использовалось почти очевидное матричное тождество $(I + GF)^{-1}G = G(I + FG)^{-1}$.

В работах [15], [16] показано, что если в (5.9) $\beta \rightarrow \infty$, то $W_r(s) = W(s)$, и следовательно, (П.9) совпадает с (П.7), а (П.10) с (П.8). Таким образом, передаточные матрицы замкнутой системы с наблюдателем (5.4), (5.6)-(5.9) будут удовлетворять матричным неравенствам теорем 3 и 3. Так, неравенства (3.7) и (3.9) при $R = rI$ для этих передаточных матриц примут вид

$$T_{zf}^T(-j\omega)QT_{zf}(j\omega) \leq rI, \quad \omega \in [0, \infty], \quad (\text{П.11})$$

$$T_{uf}^T(-j\omega)T_{uf}(j\omega) \leq 4I, \quad \omega \in [0, \infty]. \quad (\text{П.12})$$

Передаточные матрицы исходной замкнутой системы с наблюдателем (2.1), (5.6)-(5.9) (от $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}$ и $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{u}$) в силу (5.1)-(5.3) имеют вид

$$T_{zw}(s) = T_{zf}(s)T_{fw}(s), \quad T_{uw}(s) = T_{uf}(s)T_{fw}(s). \quad (\text{П.13})$$

Умножая (П.11) и (П.12) слева на $T_{fw}^T(-j\omega)$, а справа на $T_{fw}(j\omega)$, и учитывая в правой части полученных выражений соотношение (5.5), придём в силу (П.13) к неравенствам

$$T_{zw}^T(-j\omega)QT_{zw}(j\omega) \leq r\rho^2I, \quad \omega \in [0, \omega^*], \quad (\text{П.14})$$

$$T_{uw}^T(-j\omega)T_{uw}(j\omega) \leq 4\rho^2I, \quad \omega \in [0, \omega^*]. \quad (\text{П.15})$$

Из последних неравенств на основе леммы получим соотношения

$$\sum_{i=1}^m q_i z_{i,st}^2 \leq pr\rho^2 \|\mathbf{w}^*\|^2, \quad \sum_{i=1}^m u_{i,st}^2 \leq 4p\rho^2 \|\mathbf{w}^*\|^2, \quad (\text{П.16})$$

доказывающие утверждение теоремы относительно неравенств (4.1)-(4.3). Подобным же образом получаются аналоги неравенств (4.4), (4.5).

- [1] Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
- [2] *Якубович В.А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления //АиТ. 1984. № 8. С. 5-45.
- [3] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости. М.: Наука, 1977.
- [4] *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996.
- [5] *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H -теория) //АиТ. 1992. № 9. С. 3-32.
- [6] *Лтов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-III //АиТ. 1960. № 4. С. 436-441; № 5. С. 561-568; № 6. С. 661-665.
- [7] *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control //Bol. Soc. Mat., Mexicana. 1960. V. 5. No. 1. P. 102-119.
- [8] *Александров А.Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов на основе частотных критериев качества //АиТ. 1972. № 2. С. 17-29.
- [9] *Тимофеев Ю.К.* Статические ошибки аналитически сконструированных систем //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратовский политехнический институт, 1976. С. 53-60.
- [10] *Александров А.Г.* Аналитический синтез регуляторов по заданным показателям качества переходных процессов //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратовский политехнический институт, 1978. С. 21-38.
- [11] *Садомцев Ю.В.* Аналитическое конструирование регуляторов по заданным показателям качества. Развитие проблемы //Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. научн. сб.: Саратовский политехнический институт, 1980. С. 32-48.
- [12] *Волков Е.Ф., Ершов Н.Н.* Синтез асимптотически устойчивых многосвязных систем с заданной статической точностью //АиТ, 1981. № 7. С. 19-27.
- [13] *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
- [14] *Александров А.Г.* Свойства аналитически сконструированных линейных систем //АиТ. 1975. № 10. С. 5-11.
- [15] *Doyle J.C., Stein G.* Robustness with observers //IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 1. P. 607-611.
- [16] *Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M.* Robustness results in Linear-Quadratic Gaussian based multivariable control designs //IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 75-92.

- [17] *Alexandrov A.G., Chestnov V.N.* Accuracy control and H_∞ optimization //Abstracts 17th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization, Prague, Czech Republic, 1995. V.1. P. 54-56.
- [18] *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полётом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
- [19] *Якубович В.А.* Оптимальное гашение вынужденных колебаний по заданному выходу системы //Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 323-327.

Поступила в редакцию 29.05.97